

MARSANO

CENNI SULL' ANALISI

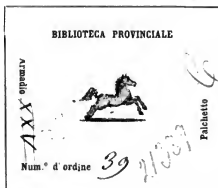
N° 6

T. /

.  
ea

VITTORIO EM. III

Digitized by Google



1001-25-57-050



# CENNI

SOPRA ALCUNI RISULTATI OTTENUTI

## NELL' ANALISI ALGEBRICA E DIFFERENZIALE

DA G. B. MARSANO

PROFESSORE DI MATEMATICHE IN GENOVA



GENOVA

CO' TIPI DEL R. I. DE' SORDO-MUTI

1862



## DICHIARAZIONE

---

**D**a qualche tempo io vagheggiava l'idea d'instituire un Giornale di Matematiche elementari, nel quale poter esporre segnatamente alcune mie Memorie sopra diverse materie, di cui ebbi occasione di occuparmi più di proposito nei decorsi anni. Ma contrarie circostanze di continuo opponendosi all'effettuamento di questo mio desiderio; fra le quali non è ultima quella della spesa, e della difficoltà di trovare sufficiente numero di abbonati; mi decisi così di seguire il consiglio profferitomi da alcuni amici, di pubblicare solo, a modo di annunzio, un sunto de' principali risultati da me ottenuti; riserbandone tuttavia le dimostrazioni per le colonne di detto Giornale, qualora mai giungessi ad intraprenderne la redazione.

Genova, Settembre 1862.

G. B. MARRASO





# CENNI SOPRA ALCUNI RISULTATI DI ANALISI ALGEBRICA E DIFFERENZIALE

## I.

Rappresentando  $V_{m,n}$  la somma delle potenze  $m^{esime}$  dei primi  $n$  numeri naturali, cioè ponendo

$$V_{m,n} = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m,$$

si ha la formola generale

$$V_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{3} (m)_1 C_1 n^{m-1} - \frac{1}{4} (m)_2 C_2 n^{m-2} + \frac{1}{5} (m)_3 C_3 n^{m-3} - \dots \\ \dots \dots \dots \pm \frac{1}{i+1} (m)_i C_i n^{m-i} \mp \dots \dots \dots \pm \frac{1}{m} (m)_{m-1} C_{m-1} n, \text{ ovvero } \pm \frac{1}{m-1} (m)_{m-2} C_{m-2} n^2; \end{cases}$$

dove sono i fattori

$$(m)_i = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i};$$

gli altri fattori

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot 3}, C_2 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}, C_3 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7}, C_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}, C_5 = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 11}, C_{11} = \frac{691}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13},$$

$$C_{13} = \frac{7}{2 \cdot 3}, C_{15} = \frac{3617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}, C_{17} = \frac{45867}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19}, C_{19} = \frac{283 \cdot 617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}, C_{21} = \frac{11 \cdot 131 \cdot 395}{2 \cdot 3 \cdot 25},$$

$$C_{23} = \frac{256564091}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}, C_{25} = \frac{13 \cdot 637931}{2 \cdot 3}, C_{27} = \frac{7 \cdot 3592780147}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29}, C_{29} = \frac{3 \cdot 173516825301}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31}, \text{ ecc.};$$

e prendendo di ciascun *doppio segno* il superiore o l'inferiore, a seconda delle forme  $4e+1$ , o  $4e-1$ , che abbiano i numeri *impairi*  $i$ ,  $m-1$ , ovvero  $m-2$ . Devesi però ritenere, come di condizione (che risulta dalla Teoria), di far sempre terminare questo polinomio al termine in  $n^2$ , pei casi di  $m$  *impairi* a partir da 5, ed invece al termine in  $n$ , per gli altri casi di  $m$  *pairs* a partir da zero, compresi quelli ancora di  $m=1$ .

Così, ponendo successivamente  $m=0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  si avranno, dietro tali avvertenze, le seguenti formole particolari:

$$V_{0,n} = n, V_{1,n} = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n, V_{2,n} = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} n = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n),$$

$$V_{3,n} = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} n^2 = \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2), V_{4,n} = \frac{1}{30} (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n),$$

$$V_{5,n} = \frac{1}{42} (2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2), \text{ e via di seguito: potendo avanzarsi in queste ricerche fino al}$$

caso di  $m=31$  inclusivo, mediante l'impiego dei soli  $C$  sopra riportati.

## II.

Considerando una qualunque *progressione per differenza*, composta di  $n$  termini, e di ragione  $i$ ; della quale si noti per  $k$  la *somma di due termini equidistanti dagli estremi*, o vale a dire la *somma degli estremi*; se si rappresenti con  $S_m$  la *somma delle potenze*  $m^{\text{esima}}$  di tutti i suoi  $n$  termini, si avrà questa data dalla formola:

$$S_m = \frac{1}{2^m} \left\{ (m)_0 A_0 k^m i^0 + (m)_2 A_2 k^{m-2} i^2 + (m)_4 A_4 k^{m-4} i^4 + (m)_6 A_6 k^{m-6} i^6 + \dots \right. \\ \left. + (m)_{m-1} A_{m-1} k i^{m-1} \right\};$$

dove, pei valori di  $p$  pari, il coefficiente

$$(m)_p = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p};$$

designando le  $A$  dei polinomj in  $n$ , che hanuo da principio le espressioni qui appresso:

$$A_0 = n, \quad A_2 = \frac{1}{3} n (n^2 - 1), \quad A_4 = \frac{1}{15} n (n^2 - 1) (3n^2 - 7), \quad A_6 = \frac{1}{315} n (n^2 - 1) (3n^4 - 18n^2 + 31), \\ A_8 = \frac{1}{45} n (n^2 - 1) (3n^6 - 55n^4 + 259n^2 - 381), \quad A_{10} = \frac{1}{23} n (n^2 - 1) (3n^8 - 82n^6 + 410n^4 - 1636n^2 + 2535);$$

per le quali risulterebbe già applicabile la formola fino al caso di  $m=11$  inclusivo.

## III.

Se della *progressione* precedente si moltiplichino fra di loro gli  $n$  termini semplici ad  $m$  ad  $m$ , e si noti con  $P_m$  la *somma di tutti i prodotti differenti* così formati; si avrà questa somma espressa dalla seguente formola generale:

$$P_m = \frac{1}{2^m} \cdot (n)_m \cdot \left\{ (m)_0 B_0 k^m i^0 - (m)_2 B_2 k^{m-2} i^2 + (m)_4 B_4 k^{m-4} i^4 - (m)_6 B_6 k^{m-6} i^6 + \dots \right. \\ \left. \pm (m)_{m-1} B_{m-1} k i^{m-1} \right\};$$

dove sono i polinomj

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{2} (n+1), \quad B_4 = \frac{1}{15} (n+1) (5n+7), \quad B_6 = \frac{1}{315} (n+1) (33n^2 + 112n + 95), \\ B_8 = \frac{1}{105} (n+1) (175n^3 + 945n^2 + 1769n + 1145), \quad B_{10} = \frac{1}{27} (n+1) (585n^4 + 3080n^3 + 9614n^2 + 15816n + 7663),$$

e così avanti, però senza una legge cognita. Per tali  $B$  già determinati, sarebbe pure applicabile la formola fino al caso di  $m=11$ .

## IV.

Se i termini della detta *progressione* venissero prima elevati a potenza  $q^{\text{esima}}$ , e poi se ne formassero, come sopra, tutti i prodotti differenti ad  $n$  ad  $m$ , esisterebbero formole analoghe, certamente più complicate, per l'espressione delle somme di questi ultimi.

Per esempio, elevando al quadrato tutti i termini della progressione, e poi moltiplicando i quadrati fra di loro a due a due, la somma di tutti i prodotti differenti, che si indichi al momento con  $S$ , verrà così espressa:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (n)_2 \cdot \left\{ k^4 + \frac{1}{2}(n+1)(n-5)k^2 + \frac{1}{45}(n+1)(5n^2 - 9n^2 - 5n + 21)k^4 \right\}.$$

In particolare, considerando la serie dei numeri naturali elevati al quadrato, cioè la serie  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ , e notando con  $Z_m$  la somma dei prodotti ad  $m$  ad  $m$  di questi ultimi; si avrebbe l'espressione di tal somma della forma  $Z_m = \frac{1}{\gamma_m} \cdot \lambda \cdot \mu_m \cdot R_m$ , dove sia il fattore  $\lambda = n(n+1)(2n+1)$ , il fattore  $\mu_m = (n-1)(n-2) \dots (n-m+1) \cdot (2n-1)(2n-5) \dots (2n-2m+3)$ , salvo a prendere  $\mu_1 = 1$ ; e dove rappresenti  $\gamma_m$  un divisore numerico, ed invece  $R_m$  un polinomio in  $n$ , che, per i primi cinque ordini, ammettono i valori seguenti:

$$\gamma_1 = 6, \quad \gamma_2 = 360, \quad \gamma_3 = 43360, \quad \gamma_4 = 5445200, \quad \gamma_5 = 339251200;$$

$$R_1 = 1, \quad R_2 = 5n + 6, \quad R_3 = 35n^2 + 91n + 60, \quad R_4 = 175n^2 + 733n^3 + 1046n + 304,$$

$R_5 = 585n^4 + 2510n^3 + 5291n^2 + 3478n + 2160$ : onde risulta già cognita l'espressione di  $Z_m$  fino al 5.<sup>o</sup> ordine inclusivo.

Similmente, considerando la serie dei cubi dei numeri naturali, cioè la serie  $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$ , e notando  $X_m$  la somma dei loro prodotti ad  $m$  ad  $m$ , si hanno, per i primi ordini, le formole:

$$X_1 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2, \quad X_2 = \frac{1}{124} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+1) \cdot (21n^3 + 56n^4 - 21n^2 - 48n^3 + 8),$$

$$X_3 = \frac{1}{2740} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n(n+1)^2 \cdot (35n^6 + 5n^5 - 257n^4 - 77n^2 + 302n^2 + 148n - 556), \text{ ecc.}$$

Ancora per la serie delle quarte potenze, cioè  $1^4, 2^4, 3^4, \dots, n^4$ , che si noti con  $Y_m$  la somma dei prodotti ad  $m$  ad  $m$ , si ottiene:

$$Y_1 = \frac{1}{30} n^5 (n+1)(2n+1)(3n^2+5n-1), \quad Y_2 = \frac{1}{500} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+1)(2n+1)(2n-1)(9n^5 + 20n^4 - 45n^3 - 50n^2 + n + 50),$$

ecc. e così per le potenze superiori.

## V.

Più in generale, designando  $\psi(n)$  una funzione intera e razionale di  $n$ , se si consideri la serie dei numeri  $\psi(1), \psi(2), \psi(3), \dots, \psi(n)$ , dei quali si facciano tutti i prodotti differenti ad  $m$  ad  $m$ , la somma  $P_m$  di questi ultimi sarà sempre esprimibile in funzione di  $n$ , con formole analoghe alle precedenti.

Per esempio, preso  $\psi(n) = n^2 - n + 1$ , che, per  $n = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ , fornisce la serie degli  $n$  numeri  $1, 3, 7, 13, \dots, (n^2 - n + 1)$ , si ottengono le formole:

$$P_1 = \frac{1}{2} n (n^3 + 2), \quad P_2 = \frac{1}{45} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (5n^4 - 4n^2 + 16n^3 + n + 21),$$

$$P_3 = \frac{1}{54} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (35n^6 - 84n^5 + 158n^4 - 31n^2 + 529n^2 + 18n + 506), \text{ ecc.}$$

N. B. — Le dimostrazioni dei risultati precedenti, consegnate in due Memorie successive, occuperebbero alcuni numeri di un Giornale da 7 od 8 fogli di stampa. Oltre a ciò, tengo in pronto altre Memorie, riguardanti varie questioni di Analisi e di Geometria; fra le quali una *sull'eliminazione di un'incognita fra due equazioni di qualunque grado*; altra contenente un'estesa teoria *delle posizioni delle rette e dei piani nello spazio*, da servire come di introduzione ad un Corso regolare di Geometria Descrittiva; una terza Memoria *sulla legge delle derivate n.ime delle funzioni di funzioni di una o più variabili*; e parecchie Note infine sopra argomenti diversi, che fora inutile adesso di enumerare. Solo mi limiterò ad un breve cenno della detta Memoria *sulla legge delle derivate n.ime* ecc., pei casi più semplici del problema in quella risoluto: ben sapendo che dello stesso fu già data una soluzione assai elegante; però in forma troppo compendiosa, per non lasciare alcun che a desiderare dal lato *sviluppo definitivo* della formula medesima.

## VI.

Supposto  $z$  una funzione di più variabili  $x, y, \dots$ , le quali siano ad un tempo funzioni di altre variabili  $r, s, t, \dots$ ; lo sviluppo definitivo d'ogni derivata  $n.ima$  di  $z$  per rapporto ad  $r, s, t, \dots$ , si potrà sempre dedurre (nel modo che sarà in parte spiegato qui appresso) dalla seguente

### FORMOLA TIPO

$$\begin{aligned} \frac{d^n z}{dr^p ds^q dt^v \dots} = & d^n z (ddd \dots d) + d^{n-1} z (d^2 dd \dots d) + d^{n-2} z (d^3 d \dots d + d^2 d^2 d \dots d) \\ & + d^{n-3} z (d^4 d \dots d + d^3 d^2 d \dots d + d^2 d^3 d \dots d) + d^{n-4} z (d^5 d \dots d + d^4 d^2 d \dots d + d^3 d^3 d \dots d + d^2 d^4 d \dots d) \\ & + d^{n-5} z (d^6 d \dots d + d^5 d^2 d \dots d + d^4 d^3 d \dots d + d^3 d^4 d \dots d + d^2 d^5 d \dots d + d^2 d^3 d^2 d \dots d) \\ & + \dots \dots \dots \\ & + d^2 z (d^{n-2} dd + d^{n-3} d^2 d + \text{ecc.}) + d^2 z (d^{n-1} d + d^{n-2} d^2 + \text{ecc.}) + dz (d^n); \end{aligned}$$

nella quale ogni  $d^n$  esterno alle parentesi vale per un segno corrispondente alle diverse derivate

$$\frac{d^n z}{dx^{m'} dy^{m''} \dots}, \text{ ed ogni } d^n \text{ interno vale invece per un segno corrispondente alle derivate } \frac{d^n x}{dr^{m'} ds^{m''} dt^{m'''} \dots},$$

$$\frac{d^n y}{dr^{m'} ds^{m''} dt^{m'''} \dots}, \text{ ecc.}$$

In quanto ai polinomj simbolici delle parentesi, considerandovi ogni  $d$  semplice come avente l'indice 1, sono da ritenersi le seguenti condizioni essenziali:

- 1.° « In tutti i termini delle parentesi, la somma degli indici dei fattori o delle lettere  $d$  è sempre uguale ad  $n$  ».
- 2.° « Fatta astrazione dagli indici, la lettera  $d$  è sempre scritta lo stesso numero di volte in tutti i termini di una stessa parentesi, eguale all'indice  $m$  del fattore  $d^m z$  esterno ».
- 3.° « Ogni parentesi è il complesso di tutte le forme differenti, registrate ciascuna una volta sola, le quali si ottengono, aumentando in tutti i modi possibili di un'unità l'indice d'un fattore dei ter-



si avranno tosto i coefficienti

$$A = \frac{(n-1)!}{2!}, B = \frac{(n-2)!}{3!}, C = \frac{(n-3)!}{2! (2!)}, D = \frac{(n-3)!}{4!}, E = \frac{(n-4)!}{3! 2!}, F = \frac{(n-5)!}{3! (2!)^2},$$

$$G = \frac{(n-4)!}{5!}, H = \frac{(n-5)!}{4! 2!}, I = \frac{(n-5)!}{2! (3!)^2}, K = \frac{(n-6)!}{2! 3! (2!)^2}, L = \frac{(n-7)!}{4! (2!)^3}, \text{ ecc.,}$$

che compiranno lo sviluppo della medesima.

Potrebbe verificarsi questa formula a posteriori, differenziandola una volta rapporto a  $t$ , e calcolando direttamente lo sviluppo della nuova derivata  $\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$  collo stesso metodo, cambiato  $n$  in  $n+1$ : dal

confronto dei due risultati, si conchiuderà allora l'esattezza di quello testè riferito.

Dopo questo caso il più semplice, non riuscirebbe così agevole l'indicare parimenti con brevi ceppi l'uso della detta *Formola Tipo*, per la deduzione delle derivate  $n^{\text{esime}}$  di  $x$  in altri casi più complessi: onde mi limiterò solo ad accennare che mentre, nel caso considerato, ad ogni fattore simbolico  $d^n$  si fa corrispondere un fattore vero  $\frac{d^n x}{dt^n}$ , nel nuovo caso ad esempio di  $x=f(x)$  con  $x=\varphi(r, s)$ , allo stesso

simbolo  $d^n$  dovrebbe farsi corrispondere invece un polinomio di  $n+1$  termini, seguiti una legge progressiva; e si verrebbe poi a sostituire alla forma generale già indicata dei terminali delle parentesi, una nuova forma derivante dal prodotto dei varj polinomj in discorso, che si rimpiazzerebbe da ultimo colla forma vera, accompagnata da un adatto coefficiente, il quale si esprimerebbe col prodotto di due formole consimili a quella dell' $N$  sopra veduta. Analogamente per  $z=f(x)$  con  $x=\varphi(r, s, t)$ , e via di seguito.

Se voglia trattarsi il caso di  $z=f(x, y)$ , mentre  $x=\varphi(t)$ , ed  $y=\psi(t)$ , allora ai fattori  $d^m z$ , esterni alle parentesi della *formola Tipo*, si dovranno sostituire successivamente tutte le forme della derivata

$\frac{d^m z}{dx^{m-1} dy}$  per  $s=0, 1, 2, \dots, m$ . Nello stesso tempo, distinguendo i fattori  $d$  interni relativi all' $x$  da quelli

relativi all' $y$ , si verranno ad associare a tali derivate delle nuove parentesi più complesse; i termini delle quali si tradurranno poi nei prodotti delle derivate corrispondenti di  $x$  e di  $y$  rapporto a  $t$ , accompagnati pure da coefficienti numerici, che si calcoleranno sempre con una formola analoga a quella dell' $N$  precedente: ma ulteriori dettagli su questo oggetto mi allontanerebbero di troppo dal mio proposito. Però non

tralascerò di avvertire come venga sensibilmente a semplificarsi lo sviluppo di  $\frac{d^n z}{dt^n}$  in discorso, per l'ipotesi speciale di  $t=x$ , e così di  $z=f(x, y)$  mentre  $y=\psi(x)$ ; nel qual caso si indicherà esso, per distinzione, con  $\frac{1}{dx^n} d^n z$ , ovvero con  $\frac{1}{dx^n} d^n f$ , scrivendo  $f$  per  $z$ , come si costuma di fare specialmente

nelle derivate dell'equazione  $f(x, y)=0$ . Poendo tale sviluppo di  $\frac{1}{dx^n} d^n f=0$ , si avrà allora in forma generale l'equazione derivata d'ordine  $n$  dell'equazione primitiva  $f(x, y)=0$ , considerandovi  $x$  variabile indipendente, ed  $y$  funzione di  $x$ .



# OPERE

DELLO STESSO AUTORE

VENDIBILI A QUESTA TIPOGRAFIA

E PRESSO

LA LIBRERIA LUIGI BEUF

Corso Vercellina N.° 57.

—••••—

MEMORIA SUI TRIANGOLI SIMILI	•	.	.	.	.	.	.	.	.	Ln. 2. —
» SUI RAPPORTI DELLE FIGURE	.	.	.	.	.	.	.	.	.	» 6. 50
» SOPRA TRE TEORIE PIU' ELEMENTARI DELLA GEOMETRIA	.	.	.	.	.	.	.	.	.	» 1. 75
» SULLE RADICI PRIMITIVE DELLE EQUAZIONI BINOMIE RAPPORTATE A UN MODULO PRIMO	.	.	.	.	.	.	.	.	.	» 8. —

---

**Prezzo della presente Ln. 1.**

---









